数理解析研究所講究録
第2060巻 2018年 33-37

Transverse Kähler structures on central foliations

鹿児島大学大学院・理工学研究科　石田　裕昭
Hiroaki Ishida
Graduate School of Science and Engineering
Kagoshima University

1　序

本稿では, 大阪大学の糟谷久矢氏との共同研究 [3] の一部を概説する. この研究の目的の一つは, ケーラーとは限らないような複素多様体のドルボーコホモロジーあるいはドルボー複体を調べることである. ケーラーでないような複素多様体であって, おそらく最も簡単なものは Hopf 曲面だろう. ここでは, Hopf 曲面を例にとって説明を試みる.

α を $|\alpha| > 1$ を満たす複素数とし, $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ への無限巡回群 $\mathbb{Z}$ の作用を

$$k \cdot (z_1, z_2) := (\alpha^k z_1, \alpha^k z_2), \quad k \in \mathbb{Z}, (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$$

によって定める. このとき, 商空間 $(\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})/\mathbb{Z}$ は自然に複素多様体になり, 可微分多様体としては $S^1 \times S^3$ と微分同相になる. $M := (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})/\mathbb{Z}$ はホップ曲面と呼ばれ, 第一ベッチ数が 1 であり, 特に奇数であることからケーラー構造を持たないことがわかる.

似たような構成を持つものとして, 射影直線 $\mathbb{C}P^1$ がある. $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ への代数トーラス $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ の作用を

$$g \cdot (z_1, z_2) := (gz_1, gz_2), \quad g \in \mathbb{C}^*, (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$$

によって定めると, 商空間 $\mathbb{C}P^1 := (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})/\mathbb{C}^*$ は 1 次元の複素多様体になり, 特にケーラー多様体になる.

今, 次の単射準同型によって $\mathbb{Z}$ を $\mathbb{C}^*$ の部分群だと思うことにする: $\mathbb{Z} \ni k \mapsto \alpha^k \in \mathbb{C}^*$. このとき, $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ 上の恒等写像は $\mathbb{C}^*/\mathbb{Z}$-主束 $M \to \mathbb{C}P^1$ を誘導する. $\mathbb{C}^*/\mathbb{Z}$ の M への自由作用および射影 $M \to \mathbb{C}P^1$ は正則である.

$H := \mathbb{C}^*/\mathbb{Z}$ は複素コンパクトトーラスであり, 特に複素リー群である. $\mathfrak{h}$ を H のリー

環とする. H はコンパクトかつ M への作用は自由であるから, $\mathfrak{h}$ に値を持つ M 上の 1-形式 $\theta \in \Omega^1(M) \otimes \mathfrak{h}$ であって, 次を満たすもの (接続と呼ばれる) が存在する:

1. $i_{X_v}\theta = v, \quad \forall v \in \mathfrak{h}$.
2. θ は H-同変.

$\mathfrak{h}$ の $\mathbb{R}$ 上の基底を v_1, v_2 とすると, θ は ($\mathbb{R}$ に値を持つ)M 上の 1-形式 θ_1, θ_2 を用いて

$$\theta = \theta_1 \otimes v_1 + \theta_2 \otimes v_2$$

と書ける. $W \subset \Omega^1(M)$ を θ_1, θ_2 で張られる部分空間とする. このとき, まず M のドラーム複体について

$$\begin{aligned}\Omega^*(M) &\simeq \Omega^*(M)^H \\ &= \Omega^*(\mathbb{C}P^1) \otimes \bigwedge W \\ &\simeq H^*(\mathbb{C}P^1) \otimes \bigwedge W\end{aligned}$$

が得られる. ここで, $A^* \simeq B^*$ は A^* と B^* は quasi-isomorphic であることを意味し, $\Omega^*(\mathbb{C}P^1)$ は引き戻しによって $\Omega^*(M)$ の部分代数と思っている. また, $W \otimes \mathbb{C}$ の元の $(1,0)$-部分の成す部分空間を $W^{1,0} \subset \Omega^{1,0}(M)$, $(0,1)$-部分の成す部分空間を $W^{0,1} \subset \Omega^{0,1}(M)$ とすると, M のドルボー複体について

$$\begin{aligned}\Omega^{*,*}(M) &\simeq \Omega^{*,*}(M)^H \\ &= \Omega^{*,*}(\mathbb{C}P^1) \otimes \bigwedge(W^{0,1} \oplus W^{1,0}) \\ &\simeq H^{*,*}(\mathbb{C}P^1) \otimes \bigwedge(W^{0,1} \oplus W^{1,0})\end{aligned}$$

が得られる. 結果として, Hopf 曲面 M が $\mathbb{C}P^1$ 上のトーラス主束の全空間であることを用いて, M の有限次元ドラームモデル $H^*(\mathbb{C}P^1) \otimes \bigwedge W$ と, 有限次元ドルボーモデル $H^{*,*}(\mathbb{C}P^1) \otimes \bigwedge(W^{0,1} \oplus W^{1,0})$ を構成することができた.

2 Canonical and central foliations

ここからは, M はコンパクトかつ連結な複素多様体とする. このとき, M の自己同型写像, つまり M から M 自身への双正則写像全体 $\mathrm{Aut}(M)$ は複素リー群をなすことが知られている ([1]). M 上の正則ベクトル場全体 $\mathfrak{X}(M)$ は複素リー代数をなし, 各正則ベクトル場に対してその実部を対応させる写像は, $\mathfrak{X}(M)$ と $\mathrm{Aut}(M)$ のリー代数との間の同型を与える. これによって, $\mathrm{Aut}(M)$ のリー代数と $\mathfrak{X}(M)$ を同一視することにする.

T を $\mathrm{Aut}(M)$ の極大コンパクトトーラスとし, $\mathfrak{t}$ を T のリー代数とする. $\mathfrak{t}$ は $\mathfrak{X}(M)$ の (実) 部分代数である. $\mathfrak{h}_M$ を $\mathfrak{t}$ に含まれる複素部分代数のうち最大のもの, すなわち

$$\mathfrak{h}_M = \mathfrak{t} \cap J\mathfrak{t}, \quad J \text{ は } \mathfrak{X}(M) \text{ の複素構造}$$

とする. $\mathfrak{h}_M$ の指数写像による像 $H_M := \exp(\mathfrak{h}_M) \subset \mathrm{Aut}(M)$ は, 複素リー部分群である (閉とは限らない).

命題. 次が成り立つ:

1. $\mathfrak{h}_M$ は $\mathfrak{X}(M)$ の中心に含まれる.
2. $\mathfrak{h}_M$ は極大コンパクトトーラス T の取り方によらない.
3. H_M の M への自然な作用は局所自由である.

定義. $\mathcal{F}$ を M 上の葉層構造とする.

1. ある複素部分代数 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}_M$ が存在して, $\mathcal{F}$ の各葉が $H := \exp(\mathfrak{h})$ の軌道であるとき, $\mathcal{F}$ を M の central foliation という.
2. 特に $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_M$ のとき, $\mathcal{F}$ を M の canonical foliation という.

定義. $\mathcal{F}$ を M 上の葉層構造とする. M 上の 2-形式 $\omega \in \Omega^2(M)$ が $\mathcal{F}$ に関して横断シンプレクティック構造であるとは, 次を満たすことをいう:

1. $d\omega = 0$.
2. $p \in M$ に対し, $\ker \omega_p = T_p\mathcal{F}$.

定義. $\mathcal{F}$ を M 上の正則葉層構造とし, ω は $\mathcal{F}$ に関して横断シンプレクティック構造であるとする. このとき, ω が $\mathcal{F}$ に関して横断ケーラー構造であるとは, 次を満たすことをいう: $p \in M$ と $X, Y \in T_pM$ に対し,

1. $\omega_p(JX, JY) = \omega_p(X, Y)$,
2. $\omega_p(JX, X) \geq 0$.

横断ケーラー構造や central foliation の例については, [2] などを見よ.

3 結果

非コンパクトな連結リー群が (局所) 自由に多様体に作用しているとき, 一般には接続が存在するかどうかはわからない. しかしながら前節で構成した H_M の M への作用に関し

ては次が言える:

命題. M 上の任意の central foliation $\mathcal{F}$ に対して, 接続が存在する. すなわち, 任意の複素部分代数 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}_M$ に対し, $\mathfrak{h}$ に値を持つ M 上の 1-形式であって

1. $i_{X_v}\theta = v, \quad \forall v \in \mathfrak{h}$,
2. θ は $H(= \exp(\mathfrak{h}))$-同変

を満たすものが存在する.

M 上の central foliation $\mathcal{F}$ の接続 θ と $\mathfrak{h}$ の (実ベクトル空間としての) 基底 $v_1, \ldots, v_k$ を固定する. このとき, $\theta \in \Omega^1(M) \otimes \mathfrak{h}$ は $\theta_1, \ldots, \theta_k \in \Omega^1(M)$ を用いて

$$\theta = \theta_1 \otimes v_1 + \cdots + \theta_k \otimes v_k$$

と書ける.

ドラーム複体 $\Omega^*(M)$ の部分複体

$$\Omega^*_{\mathrm{basic}}(M) := \{\alpha \in \Omega^*(M) \mid i_{X_v}\alpha = 0, L_{X_v} = 0, \forall v \in \mathfrak{h}\}$$

を basic 複体といい, そのコホモロジー $H^*_{\mathrm{basic}}(M)$ を basic コホモロジーという. 同様にして, basic ドルボー複体および basic ドルボーコホモロジーが定義される.

定理. $\alpha \in \Omega^{\dim M - \dim \mathcal{F}}_{\mathrm{basic}}(M)$ に対して, $\alpha \wedge \theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_k \in \Omega^{\dim M}(M)$ を対応させる写像は同型 $H^{\dim M - \dim \mathcal{F}}_{\mathrm{basic}}(M) \cong H^{\dim M}(M)$ を誘導する. 特に $H^{\dim M - \dim \mathcal{F}}_{\mathrm{basic}}(M) \cong \mathbb{R}$.

前と同じように, $W \subset \Omega^1(M)$ を $\theta_1, \ldots, \theta_k$ で張られる部分空間とし, $W \otimes \mathbb{C}$ の元の $(1,0)$-部分の成す部分空間を $W^{1,0} \subset \Omega^{1,0}(M)$, $(0,1)$-部分の成す部分空間を $W^{0,1} \subset \Omega^{0,1}(M)$ とする.

定理. 次の quasi-isomorphism がある:

1. $\Omega^*(M) \simeq \Omega^*_{\mathrm{basic}}(M) \otimes \bigwedge W$.
2. $\Omega^{*,*}(M) \simeq \Omega^{*,*}_{\mathrm{basic}}(M) \otimes \bigwedge(W^{1,0} \oplus W^{0,1})$.

$\mathcal{F}$ に関して横断的にケーラーであるならば, 次の有限次元モデルを得ることができる:

定理. M が $\mathcal{F}$ に関して横断的にケーラーであるならば, 次の quasi-isomorphism がある:

1. $\Omega^*(M) \simeq H^*_{\mathrm{basic}}(M) \otimes \bigwedge W$.
2. $\Omega^{*,*}(M) \simeq H^{*,*}_{\mathrm{basic}}(M) \otimes \bigwedge(W^{1,0} \oplus W^{0,1})$.

参考文献

[1] S. Bochner and D. Montgomery, *Locally compact groups of differentiable transformations*, Ann. of Math. (2) **47** (1946), 639–653.

[2] H. Ishida, *Torus invariant transverse Kähler foliations*, Trans. Amer. Math. Soc. **369** (2017), 5137–5155.

[3] H. Ishida and H. Kasuya, *Transverse Kähler structures on central foliations of complex manifolds*, `arXiv:1610.00847`.